EXERCICE 12 :

(E) : $y' - y = 4\cos x$

1) (E_0) : $y' = y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = k.e^x$; $k \in IR$

2) $g(x) = a\cos x + b\sin x$

$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$

g est une solution de (E)

$\Leftrightarrow g'(x) - g(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow (a - b + 4).\cos x + (a + b).\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 4 = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

d'où : $g(x) = -2\cos x + 2\sin x$ est une solution de (E)

3) f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) - (f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

4) f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = k.e^x$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + k.e^x$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = -2\cos x + 2\sin x + k.e^x$; $k \in IR$

EXERCICE 13 :

$L.y' + r.y = E$

1) $\begin{cases} (0,2)y' + 100.y = 10 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -500y + 50 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

d'où : $i(t) = (\frac{-50}{500})e^{-500t} + \frac{50}{500}$

$i(t) = (\frac{-1}{10})e^{-500t} + \frac{1}{10}$

2) * $\lim_{x \to +\infty} i(t) = \frac{1}{10} = 0,1$

* interprétation : La bobine s'oppose à L'établissement du courant dans le circuit Et ce conformément à la loi de LORENS Quant le régime permanent s'installe i devient constant : $i = I_{permanant}$ (=0,1 ici)

EXERCICE 14 :

1) $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$

la solution est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{2}x)$

2) $\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(\pi) = -1 \\ y'(\pi) = -2 \end{cases}$ $w = 4$

$f(x) = A\sin(4x) + B\cos(4x)$; $(A,B) \in IR^2$

$f'(x) = 4A\cos(4x) - 4B\sin(4x)$

$\begin{cases} f(\pi) = -1 \\ f'(\pi) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ 4A = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = \frac{-1}{2} \end{cases}$

D'où la solution de est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{-1}{2}\sin(4x) - \cos(4x)$

3) même travail que pour 2)